Übungen zu Mathematik III
Blatt 7

Aufgabe 1: Die Matrix

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung um die z-Achse um den Winkel α, d.h. $R_z(\alpha) \cdot \vec{x}$ rotiert den Vektor $\vec{x}$ bzgl. der $z-$Achse um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn.

Die Eigenwerte der Matrix lauten:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = \cos(\alpha) \pm i \cdot \sin(\alpha)\,.$$

a) Wie können sie den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ geometrisch deuten? Wie sieht der zugehörige Eigenvektor aus (keine Rechnung!)?

b) Die Eigenwerte $\lambda_{2,3}$ sind nur für spezielle Winkel reell. Bestimmen Sie diese Winkel und deuten Sie, warum genau für diese Winkel der Eigenwert reell ist. Wie sieht in diesem Fall die Abbildung aus?

Aufgabe 2: Eine Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Analog ist sie negativ definit, wenn nur negative Eigenwerte vorliegen.

Überprüfen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit, indem sie zunächst die Gerschgorin Kreise verwenden. Anschließend überprüfen sie ihre Ergebnisse, indem Sie die Eigenwerte ausrechnen:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 4: Wenn wir partielle Differentialgleichungen diskretisieren, erhalten wir große Gleichungssysteme mit Tridiagonalmatrizen, wie z.B.

$$A_h := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & 1 & & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & & \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Hierbei bezeichnet $h \in \mathbb{R}^+$ einen kleinen Diskretisierungsparameter (Gitterabstände). Verwenden Sie die Gerschgorin Kreise um zu zeigen, dass die Matrix invertierbar und positiv definit ist.

Aufgabe 5: Berechnen Sie eine allgemeine Lösung des folgenden homogenen DGL-Systems 1. Ordnung:

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(t) \,.$$